

Varianta 68

SUBIECTUL I

- a) $d = 10$.
- b) $S = 16$.
- c) $AB = 2\sqrt{5}$.
- d) Dacă C este simetricul lui A față de B $\Rightarrow C(-2, 1)$.
- e) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- f) $S_{ABC} = 6$.

SUBIECTUL II

1.

- a) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0$.
- b) Restul este $f(1) = -1$.
- c) $\bar{z} = 3 - 4i$.
- d) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
- e) $A \cdot B = 2B$.

2.

- a) $f(f(1)) = 2 + \sqrt{2}$.
- b) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{2}$.
- d) $\int_1^4 f(x) dx = \frac{73}{6}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^2} = 0$.

SUBIECTUL III

- a) $(x \circ y) \circ z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1} \circ z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2}$ (1).
 $x \circ (y \circ z) = x \circ \sqrt[3]{y^3 + z^3 - 1} = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2}$ (2).
 Din (1) și (2) rezultă $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$
- b) $\exists e \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Relație echivalentă cu
 $\sqrt[3]{x^3 + e^3 - 1} = \sqrt[3]{e^3 + x^3 - 1} = x \Rightarrow e = 1 \in \mathbf{R}$.

c) $x \circ (-x) = \sqrt[3]{x^3 + (-x)^3} - 1 = \sqrt[3]{-1} = -1 \quad \forall x \in \mathbf{R}.$

d) Fie $0'$ simetricul elementului 0

$$\Rightarrow 0 \circ 0' = 0' \circ 0 = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{0^3 + 0'^3} - 1 = 1 \Rightarrow 0' = \sqrt[3]{2} \in \mathbf{R}.$$

e) Fie $P(n) : \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori}} = \sqrt[3]{nx^3 - (n-1)}, n \in \mathbf{N}^*.$

$$P(1) : x = x(A).$$

Presupunem $P(k)(A)$ și demonstrăm $P(k+1)(A)$, unde $k \geq 1$.

$$P(k) : \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori}} = \sqrt[3]{kx^3 - (k-1)}, \text{ iar } P(k+1) : \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = \sqrt[3]{(k+1)x^3 - k}.$$

$$\text{Dar } \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k+1 \text{ ori}} = \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } k \text{ ori}} \right) \circ x \stackrel{P(k)}{=} \left(\sqrt[3]{kx^3 - (k-1)} \right) \circ x = \sqrt[3]{(k+1)x^3 - k}.$$

De unde $P(n)$ este (A) $\forall n \in \mathbf{N}^*.$

f) Presupunem că $\exists x, y \in \mathbf{R}^*$ astfel încât $\frac{x}{y} \circ \frac{y}{x} = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3}} - 1 = -1 \Leftrightarrow$

$$\frac{x^6 + y^6}{x^3 y^3} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 (F) \Rightarrow \text{Presupunerea făcută este falsă}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \circ \frac{y}{x} \neq -1, \forall x, y \in \mathbf{R}^*.$$

g) Legea „ $\circ$ ” fiind asociativă și comutativă avem

$$\text{că: } (-100) \circ (-99) \circ \dots \circ 99 \circ 100 = [(-100) \circ 100] \circ [(-99) \circ 99] \circ [(-1) \circ 1] \circ 0 =$$

$$\stackrel{c)}{=} \underbrace{(-1) \circ (-1) \circ \dots \circ (-1)}_{\text{de } 100 \text{ de ori } (-1)} \stackrel{e)}{=} \sqrt[3]{100(-1)^3} - 99 \circ 0 = -\sqrt[3]{200}.$$

SUBIECTUL IV

a) Calcul direct.

$$b) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3} dx = \frac{\pi(9 - 2\sqrt{3})}{36}.$$

$$c) f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-8x(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 3)^2}.$$

d) Deoarece $f'(x) \leq 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow$ funcția f este descrescătoare pe $[0, +\infty)$.

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} = 0.$$

f) Folosind **d)** și **e)** $\Rightarrow 0 < f(x) \leq f(0) = \frac{2}{3}$.

g) $f(1) + f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) + \dots + f(\sqrt{2n+1}) =$
 $\stackrel{a)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+4}$. De unde limita cerută
 este $\frac{1}{2}$.